ΘΕΜΑ 1^o

Α. Να αναπτύξετε τις παρακάτω έννοιες δίνοντας περιγραφή τους με λόγια , με τύπους και σχήμα.

α). Συζυγής του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$.

β). Μέτρο του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$.

γ). Όρισμα του Μιγαδικού αριθμού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$.

Β. Συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις :

α). (1). $z\cdot \bar{z} = \dots$ (2). $z + \bar{z} = \dots$

(3). $z - \bar{z} = \dots$ (4). $(-\bar{z})^\nu = \dots$

β). Επιλέξτε σωστό [Σ] ή λάθος [Λ], στα παρακάτω ερωτήματα

(1). Οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 = -1$, όπου $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$ έχει λύσεις τους αριθμούς $+1, -1$. [Σ] [Λ]

(2). Οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = x + i\cdot y$, $z_2 = \overline{z_1}$, $z_3 = 0$. Σχηματίζουν στο μιγαδικό επίπεδο ισοσκελές τρίγωνο. [Σ] [Λ]

(3). Ο αριθμός $z^2 + \bar{z}^2$ είναι πραγματικός [Σ] [Λ]

ΘΕΜΑ 2^o

Α. Δίδεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{1+\alpha\cdot i}{\alpha - i}$, όπου $\alpha \in R$. Να δείξετε ότι:

α). έχει μέτρο την μονάδα β). είναι φανταστικός αριθμός

γ). Αποδείξετε ότι $[z^{2004} + z^{2001}]^8 = 16$

δ). Να τον γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή.

Β. Δίδεται ο μιγαδικός αριθμός $z = -$ ημθ $+ i\cdot$συνθ , όπου $\theta \in R$

Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z, είναι σημεία του κύκλου με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ =1.

ΘΕΜΑ 3^o

Α. Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία Α, Β, Γ και ισχύει η σχέση $\left|\dfrac{4-3\cdot i}{z_1 - z_2}\right| = \left|\dfrac{3+4\cdot i}{z_2 - z_3}\right| = \left|\dfrac{4+3\cdot i}{z_3 - z_1}\right|$.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + i\cdot y$

Αν ισχύει η σχέση : $\left|\dfrac{z-4}{z-2\cdot i}\right| = 2$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. (α). να αποδείξετε ότι αν $|z| = k^2$, $k \in R$ τότε $\bar{z} = \frac{k^4}{z}$.

(β). Αν $|z_1| = |z_2| = 1$, αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 \cdot z_2} \in I$.

Β. αν $z_1, z_2 \in C$ και ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

Τότε να δείξετε ότι $Arg(z_1) = Arg(z_2)$

[εργαστείτε γεωμετρικά ή αλγεβρικά – όπως θέλετε]